Une amélioration commode du critère de Descartes

Christian Marchal
Direction scientifique générale, ONERA

Résumé

Le critère de Descartes s'applique aux équations polynômes et donne des indications sur le nombre des racines réelles positives. Un supplément très simple permet de préciser grandement ces indications.*

* *Le mot* positif *est entendu ici dans son sens ancien et précis :* zéro n'est pas un nombre positif, *ni non plus un nombre négatif, c'est un nombre très particulier aux propriétés spéciales : on ne divise pas par zéro ! Il est bien sûr préférable d'utiliser selon les cas «x est positif» et «y est positif ou nul», plutôt que d'être contraint par l'ambiguïté du langage à aller jusqu'à dire : «x est strictement positif», «y est positif au sens large». Ces «modernisations» intempestives et inutiles nuisent à la clarté de la langue française.*

Introduction

Autrefois seuls les nombres entiers et positifs étaient considérés comme de «vrais nombres» : 1, 2, 3, 4…, puis vinrent les fractions simples 1/2, 1/3… et les plus compliquées : 14/17…, c'étaient les nombres «rationnels». Admettre qu'il y a des nombres «irrationnels» comme $\sqrt{2}$ provoqua une crise très grave et le zéro ne fut reconnu comme nombre que très tardivement. Ne parlons pas des nombres négatifs et encore moins des nombres «complexes» ou «imaginaires»… par opposition à ces derniers, les nombres ordinaires, positifs, nuls ou négatifs sont qualifiés de «réels». Tout ce vocabulaire reflète bien les problèmes de conscience successifs des mathématiciens.

Dans ces conditions, il était très naturel de se préoccuper du nombre des racines positives réelles des équations ordinaires : les «vraies racines» qu'elles soient rationnelles ou irrationnelles. Cette information continue aujourd'hui d'être très appréciée et le critère de Descartes est un élément très simple et important de cette information.

Les critères mathématiques jouent un rôle de premier plan pour permettre de bien maîtriser les raisonnements et les opérations mathématiques. Ce sont des petits ensembles de règles simples, aisées à retenir et à appliquer, qui améliorent la compréhension et permettent d'éviter bien des erreurs. Ainsi la célèbre «preuve par neuf» utilisée pour les multiplications. Le critère de Descartes est un autre exemple très ingénieux.

Le critère de Descartes

Considérons une équation polynôme ordinaire de degré n et à coefficients réels :

$$P(x) \equiv a_o + a_1x + a_2x^2 + \ldots. + a_nx^n = 0 \; ; \; a_n \neq 0 \qquad (1)$$

Le critère de Descartes [1] s'applique lorsque le polynôme P(x) est ordonné par puissances croissantes ou décroissantes comme en *(1)*. Deux coefficients a_k non nuls successifs forment une *permanence* s'ils sont de même signe, et une *variation* s'ils sont de signes opposés. Le critère de Descartes spécifie alors :

Le nombre n_p des racines réelles positives de l'équation polynôme P(x) = 0 est inférieur ou égal au nombre V des variations des coefficients du polynôme ordonné, et ces deux nombres ont la même parité.

Ainsi pour $P_A(x) = 8x^6 - 7x^2 - 5x - 6$, on obtient V = 1, donc $n_p = 1$ *(2)*

$P_B(x) = 4x^7 - 6x^6 + 9x^5 + 3x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 4x - 3$ donne V = 5, donc $n_p = 1$; 3 ou 5 *(3)*

Bien entendu le même critère peut s'appliquer à «l'équation aux opposés» pour laquelle y = –x et donner ainsi des indications sur le nombre n_n des racines réelles négatives de l'équation *(1)* à partir du nombre V_n des variations du polynôme Q(y) correspondant :

$$P(x) \equiv Q(y) \equiv a_o - a_1y + a_2y^2 - a_3y^3 + \ldots. + (-1)^n a_ny^n \qquad (4)$$

ce qui conduit à $V_n = 3$ et donc $n_n = 1$ ou 3 pour le polynôme $P_A(x)$ de *(2),* et à $V_n = 2$, donc $n_n = 0$ ou 2 pour le polynôme $P_B(x)$ de *(3)*.

On remarquera que $V+V_n = n$ dans le cas général où les coefficients a_k sont tous non nuls (on dit qu'il n'y a aucune *lacune*). Comme il y a au total n racines pour une équation de degré n, le critère de Descartes ne donne alors aucune indication sur les racines complexes.

L'amélioration du critère de Descartes

Appelons «petit terme» un terme $a_k x^k$ du polynôme P(x) tel que :

$$a_k^2 \le a_{k-1}\, a_{k+1} \qquad (5)$$

Alors, si le nombre V des variations du polynôme P(x) est inférieur ou égal à 12 (cas très général), on peut retirer tous les «petits termes» avant de compter le nombre V' des variations restantes, lequel est donc inférieur ou égal à V mais reste supérieur ou égal au nombre n_p des racines réelles positives :

$$12 \ge V \ge V' \ge n_p$$
V, V' et n_p ont la même parité *(6)*

Symétriquement, si $V_n \le 12$, la même règle s'applique avec les mêmes petits termes aux nombres V_n et V_n' du polynôme des opposés et au nombre n_n des racines réelles négatives :

$$12 \ge V_n \ge V_n' \ge n_n$$
V_n, V_n' et n_n ont la même parité *(7)*

Ainsi pour les polynômes $P_A(x)$ et $P_B(x)$ des équations *(2)* et *(3)* :

$P_A(x) = 8x^6 - 7x^2 - 5x - 6$; 5x est un petit terme, d'où $V = V' = n_p = 1$ et $V_n = 3$; $V_n' = n_n = 1$, il y a donc quatre racines complexes.
$P_B(x) = 4x^7 - 6x^6 + 9x^5 + 3x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 4x - 3$; $-6x^6$, $3x^4$ et 4x sont des petits termes, d'où V = 5 ; $V' = n_p = 1$; $V_n = 2$; $V_n' = n_n = 0$, il y a six racines complexes.

Une démonstration classique du critère de Descartes

A) La parité du nombre V de variations et celle du nombre n_p de racines positives

Soit $a_j x^j$ le terme non nul de plus bas degré. Le nombre V des variations est pair si a_j et a_n sont de même signe, et impair s'ils sont de signes opposés.

Pour x réel positif et suffisamment petit, le polynôme P(x) est du signe de a_j, et pour x suffisamment grand, il est du signe de a_n. Il y a une racine chaque fois que la courbe y = P(x) traverse l'axe des x, donc le nombre de ses racines dans l'intervalle est pair si a_j et a_n sont de même signe, et impair s'ils sont de signes opposés (de même, si vous voyagez dans les boucles de la Seine, il vous faudra la traverser un nombre impair de fois pour aller d'un point de la rive gauche à un point de la rive droite…).

Dans tous les cas, V et n_p ont la même parité. Ajoutons qu'il en est de même de V' car la suppression de termes intermédiaires ne modifie pas la parité du nombre des variations.

B) L'inégalité $V \ge n_p$

Supposons que, par exemple, le polynôme P(x) ait trois racines positives a, b, c, il y a alors un polynôme R(x) de degré n - 3, tel que :

$$P(x) = (x - a) \,.\, (x - b) \,.\, (x - c) \,.\, R(x) \qquad (8)$$

et il suffit de prouver que chaque fois que l'on multiplie un polynôme R(x) ou Q(x) par un binôme comme (x – a), le nombre de variations V augmente.

Supposons que Q(x) ait deux variations, par exemple :

$$Q(x) = Ax^8 + Bx^7 + Cx^6 - Dx^5 - Ex^4 - Fx^3 + Gx^2 + Hx + J \qquad (9)$$

avec A, B, C, D, E, F, G, H, J, tous positifs.

Alors, dans le produit P(x) = (x – a) . Q(x), le terme de plus haut degré est Ax^9, avec A positif ; le terme de degré 6 est $-(D + aC)x^6$, avec $-(D + aC)$ négatif ; le terme de degré 3 est $(G + aF)x^3$, avec $(G + aF)$ positif ; et le terme de plus bas degré est $-aJ$, négatif. Cette alternance indique que le polynôme P(x) aura au moins trois variations, soit donc effectivement au moins une de plus que Q(x).

Ce raisonnement se généralise aisément.

Le critère de Descartes et les équations de degré faible

A) Le second degré

$$P(x) = ax^2 + bx + c \qquad (10)$$

Si ac < 0, il y a une seule variation et effectivement une seule racine positive.

Si a, b et c sont du même signe, on obtient V = 0 et il n'y a pas de racine positive.

Le seul cas ambigu est celui ou les trois signes sont alternés : on obtient V = 2 et il y a deux ou zéro racines positives.

Bien entendu la discussion complète de ce dernier cas est tout à fait classique :

Si $b^2 \geq 4ac$, il y a deux racines positives réelles.
Si $b^2 < 4ac$, il n'y a pas de racines réelles.

(11)

B) Le troisième degré

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad (12)$$

Si la suite des signes des quatre coefficients est +, –, +, +, le terme bx^2 est le seul négatif, et s'il est trop petit, si par exemple $b^2 < 4ac$, il ne pourra contrebalancer les trois autres et il n'y aura aucune racine réelle positive.

Qu'en est-il si la suite des signes est +, –, +, –, ce qui entraîne V = 3 et donc une ou trois racines positives réelles ?

Examinons la dérivée dP/dx :

$$dP/dx = 3ax^2 + 2bx + c \qquad (13)$$

Si cette dérivée n'a pas de racine réelle, c'est-à-dire si $4b^2 < 12ac$, soit donc $b^2 < 3ac$, elle est de signe constant et le polynôme P(x) n'a qu'une seule racine réelle.

P(x) n'aura aussi qu'une seule racine si $c^2 < 3bd$, il suffit de considérer «l'équation aux inverses», avec $z = 1/x$ et $dz^3 + cz^2 + bz + a = 0$, cette équation a autant de racines réelles positives que l'équation *(12)*.

En sens inverse, avec les signes de a, b, c, d alternés, on peut au moins montrer que si à la fois $b^2 \geq 4ac$ et $c^2 \geq 4bd$, il y a alors sûrement trois racines positives réelles.

En somme, si un coefficient a_k du polynôme P(x) a un carré «suffisamment petit» par rapport au produit $a_{k-1}\, a_{k+1}$, on peut le retirer de la liste des coefficients avant de compter le nombre V' des variations restantes et d'appliquer la règle de Descartes (et aussi faire de même avec le nombre V_n' des variations restantes du «polynôme des opposés»).

On pourrait bien entendu chercher des critères plus efficaces, mais ce serait aux dépens de la simplicité, et le critère obtenu sera déjà d'une grande efficacité.

Nous appellerons provisoirement «petit terme» un terme $a_k x^k$ pour lequel $a_k^2 < \lambda\, a_{k-1}\, a_{k+1}$, et nous préciserons en chemin la valeur la plus intéressante de λ; valeur nécessairement positive.

Analyse générale

L'analyse générale [2] est essentiellement fonction du nombre V des variations du polynôme P(x). A chaque valeur de V on peut associer : 1°) une valeur λ_v qui qualifie les «petits termes» $a_k x^k$ par la condition $a_k^2 < \lambda_v\, a_{k-1}\, a_{k+1}$; 2°) un «polynôme limite» qui montre bien qu'on ne pourrait avoir une valeur plus élevée (et donc plus intéressante) de λ_v.

Pour V = 0 ou 1, on obtient $n_p = V$ sans ambiguïté et l'amélioration du critère de Descartes est inutile.

Pour V = 2, on obtient $\lambda_2 = 4$ et comme polynôme limite on peut prendre $P_2(x) = 1 - 2x + x^2 = (1 - x)^2$. Ce polynôme a deux racines réelles (égales à 1) et si λ_2 était supérieur à 4, le terme $-2x$ deviendrait un petit terme et l'on aurait V' = 0 seulement...

Pour V = 3, on obtient $\lambda_3 = 3$ et comme polynôme limite on peut prendre $P_3(x) = 1 - 3x + 3x^2 - x^3 = (1 - x)^3$.

Les polynômes limites sont toujours composés de termes de signes alternés ce qui entraîne n = V, leurs racines réelles sont toujours multiples, on peut les prendre égales à 1.

Pour V = 4, on obtient $\lambda_4 = 2$ et $P_4(x) = 1 - 2x + 2x^2 - 2x^3 + x^4 = (1 - x)^2 . (1 + x^2)$.

Pour V = 5, on obtient $\lambda_5 = 5/3$ et $P_5(x) = 4 - 10x + 15x^2 - 25x^3 + 25x^4 - 9x^5 = (1 - x)^3 . (4 + 2x + 9x^2)$.

Pour V = 6, on obtient $\lambda_6 = 45/32$.

On obtient de même $\lambda_7 = 135/104$ et $\lambda_8 = 6/5$

A partir de V = 9 , les cas limites s'obtiennent avec de nombreux petits termes. En conséquence, λ_v est donné par une équation du second degré et n'est plus rationnel :

$\lambda_9 = 1{,}138\ 555... = [19\ 505 - (187\ 551\ 625)^{1/2}] / 5103$
$\lambda_{10} = 1{,}076\ 067... = \{[(976\ 480)^{1/2} - 400] / 567\}^2$
$\lambda_{11} = 1{,}038\ 414... = [17\ 915 - (154\ 249\ 225)^{1/2}] / 5292$
$\lambda_{12} = 1{,}002\ 674 = \{[(140\ 100)^{1/2} - 150] / 224\}^2$
$\lambda_{13} = 0{,}978\ 578... = [1361 - (880\ 321)^{1/2}] / 432$

etc., et finalement :

$\lambda_\infty = 0{,}722\ 332... = \{[(160)^{1/2} - 5] / 9\}^2$

Discussion

Quel critère simple et efficace peut-on tirer de tous ces résultats ?

En principe, le maximum que l'on puisse obtenir est intimement lié à la fonction décroissante $\lambda_v(V)$ présentée à la fin de la section précédente. Pour un polynôme P(x) donné, on commence par compter le nombre V des variations, ce qui nous donne le λ_v correspondant et donc les «petits termes» dont le coefficient a_k satisfait à :

$$a_k^2 < \lambda_v\, a_{k-1}\, a_{k+1} \qquad (14)$$

Il suffira alors de compter le nombre V' des variations restantes, après exclusion des petits termes, puis d'appliquer la règle exprimée en *(6)* au sujet du nombre n_p de racines réelles positives du polynôme P(x) :

$$V \geq V' \geq n_p \text{ ; V, V' et } n_p \text{ ont la même parité} \qquad (15)$$

Cependant la fonction $\lambda_v(V)$ n'est pas simple et le résultat présenté comme nous venons de le faire est un algorithme plutôt qu'un critère. Pour extraire un critère simple et efficace, qui conserve la plus grande partie de l'information obtenue, remarquons que λ_{12} est à peine supérieur à 1. D'où la règle présentée dans la section 2 :

Si le nombre V des variations du polynôme ordonné $P(x)= \ a_j x^j$ est inférieur ou égal à 12 on peut qualifier les «petits termes» $a_k x^k$ par la condition :

$$\mathbf{a_k^2 \leq a_{k-1}\, a_{k+1}} \qquad (16)$$

On peut alors exclure les «petits termes» avant de compter le nombre V' des variations restantes et d'obtenir les informations suivantes sur le nombre n_p des racines réelles positives du polynôme P(x) :

$$\mathbf{12 \geq V \geq V' \geq n_p \text{ ; } V, V' \text{ et } n_p \text{ ont la même parité}} \qquad (17)$$

Avec les mêmes petits termes, la règle symétrique s'applique au «polynôme des opposés» et aux racines réelles négatives.

On remarquera que :

A) La condition $V \leq 12$ est très générale et très peu contraignante. Combien de fois avez-vous rencontré une équation polynôme avec un polynôme ayant plus de douze variations ?

B) La condition $a_k^2 \leq a_{k-1}\, a_{k+1}$ est simple à retenir et à appliquer.

C) Il y a certes une petite perte à utiliser la condition $a_k^2 \leq a_{k-1}\, a_{k+1}$ plutôt que $a_k^2 < \lambda_v\, a_{k-1}\, a_{k+1}$, mais la plupart des λ_v sont proches de 1 et l'efficacité du critère vient essentiellement de sa simplicité et de sa rapidité d'application.
Si le nombre de variations V est petit (2 , 3 ou 4), on pourra être tenté d'améliorer le critère en utilisant la condition $a_k^2 < \lambda_v\, a_{k-1}\, a_{k+1}$, avec λ_v qui est alors $6 - V$, soit 4, 3 ou 2.

Au-delà de V = 12

Pour montrer que le critère ne s'applique plus si $V > 12$, il suffit d'un seul exemple.

Considérons donc le polynôme P(x) suivant :

$$P(x) = (1-x)^9 \,.\, (42 + 78x + 84x^2 + 55x^3 + 21x^4) \qquad (18)$$

Ce polynôme a visiblement neuf racines réelles positives, toutes égales à 1, mais son développement conduit à :

$$\begin{aligned} P(x) = {} & 42 - 300x + 894x^2 - 1421x^3 + 1290x^4 \\ & - 729x^5 + 420x^6 - 378x^7 + 342x^8 - 390x^9 \\ & + 462x^{10} - 345x^{11} + 134x^{12} - 21x^{13} \end{aligned} \qquad (19)$$

P(x) est un polynôme du treizième degré à coefficients de signes alternés, il a donc treize variations ; parmi ses quatorze termes, on vérifie aisément que cinq sont des petits termes : les cinq termes consécutifs de $-729x^5$ à $-390x^9$.

L'exclusion de ces cinq termes, ou même simplement des trois termes à coefficient négatif, conduit à un nombre de variations restantes V' = 7, nombre inférieur à 9, le nombre des racines réelles positives...

Conclusion

Avec des mathématiques «élémentaires», on peut ainsi obtenir une amélioration substantielle du critère de Descartes, amélioration qui clarifie l'analyse des polynômes et devrait rendre quelques services. Certes la démonstration est longue et touffue, mais les qualités principales d'un critère mathématique sont d'une part l'efficacité et d'autre part la simplicité d'énoncé et d'application, ce qui est particulièrement le cas.

Références

1 Papelier G., *Précis d'algèbre, d'analyse et de trigonométrie*. page 325. Ed. Vuibert, Paris, 1918.

2 Marchal C. Une amélioration simple du critère de Descartes, *Revue de Mathématiques Spéciales*, à paraître.

Christian Marchal
ONERA, Direction scientifique générale, 29 avenue de la Division Leclerc, BP 72, 92322 Châtillon Cedex
christian.marchal@onera.fr